

# K(X,Y) COMME SOUS-ESPACE COMPLÉMENTÉ DE $\mathcal{L}(X,Y)$

DAHER MOHAMMAD

**RÉSUMÉ.** Soient  $X, Y$  des espaces de Banach. Dans ce travail nous montrons que  $K(X, Y)$  contient une copie complémentée de  $c_0$ , si  $Y$  contient  $\ell^\infty$  isomorphiquement, ou  $Y$  contient  $c_0$  isomorphiquement et toute suite bornée dans  $Y^*$  admet une sous-suite qui converge préfaiblement.

Dans la suite, nous prouvons qu'il existe un espace de Banach  $X$  tel que  $K(X)$  est complémenté dans  $\mathcal{L}(X)$ , et  $K(X)$  n'est pas complémenté dans son bidual.

**Abstract.** Let  $X, Y$  be Banach spaces. In this work, we show that  $K(X, Y)$  contains a complemented copy of  $c_0$ , if  $Y$  contains a copy of  $\ell^\infty$ , or  $Y$  contains a copy of  $c_0$  and every bounded sequence in  $Y^*$  has a subsequence which is  $w^*$ -convergente

In the following, we show that there exists a Banach space  $X$  such that  $K(X)$  is complemented space in  $\mathcal{L}(X)$  but  $K(X)$  is not complemented in its bidual.

Classification : 46B07, Secondaire 47B10

Mots clés : projection dans  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

## Introduction.

Soient  $X, Y$  des espaces de Banach. On désigne par  $\mathcal{L}(X, Y)$  l'espace des opérateurs bornés de  $X$  dans  $Y$  et par  $K(X, Y)$  le sous-espace de  $\mathcal{L}(X, Y)$  formé des opérateurs compacts.

Dans ce travail, nous montrons que  $K(X, Y)$  contient une copie complémentée de  $c_0$ , si  $Y$  contient  $\ell^\infty$  isomorphiquement, ou  $Y$  contient  $c_0$  isomorphiquement et toute suite bornée dans  $Y^*$  admet une sous-suite qui converge préfaiblement. Dans la suite, nous retrouvons des résultats de M.Feder [Fe], J.Johnson [Joh], et G.Emmanuele [Emm] concernant l'existence d'une projection continue de  $\mathcal{L}(X, Y)$  sur  $K(X, Y)$ .

Finalement, nous racactérisons l'existence d'une projection continue  $:K(X, Y) \rightarrow K(X, Y)^{**}$ , si  $Y$  ou  $X^*$  a la propriété de l'approximation bornée.

Pour tout Banach  $X$ , on désigne par  $B_X$  la boule unité fermé de  $X$  et par  $X^*$  le dual de  $X$ .

Notons pour tout  $x \in X$  et tout  $x^* \in X^*$   $(x, x^*) = x^*(x)$ .

Désignons par  $(e_k)_{k \geq 0}$  la base canonique de  $c_0$ .

Dans la suite on fixe deux espaces de Banach  $X, Y$  de dimensions infinies.

**Proposition 0.1.** *Supposons que  $Y$  contient  $c_0$  isomorphiquement. Alors il existe un opérateur  $\sigma : \ell^\infty \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  tel que*

- a)  $\ell^\infty \approx \sigma(\ell^\infty)$ .
- b)  $\sigma(\ell^\infty) \cap K(X, Y) = \sigma(c_0)$ .
- c) Il existe une projection continue  $P : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \sigma(\ell^\infty)$  telle que  $P|_{K(X, Y_1)}$  est une projection sur  $\sigma(c_0)$ , où  $Y_1$  est un sous-espace de Banach de  $Y$  isomorphe à  $c_0$ .
- d) Supposons  $Y$  contient  $\ell^\infty$  isomorphiquement, ou toute suite bornée dans  $Y^*$  admet une sous-suite qui converge préfaiblement. Alors il existe  $\Lambda \subset \mathbb{N}$  et une projection continue  $Q : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \sigma(\ell^\infty(\Lambda))$  telle que  $Q|_{K(X, Y)}$  est une projection sur  $\sigma(c_0(\Lambda))$ .

Démonstration.

a).

Soient  $Y_1$  un sous-espace de Banach de  $Y$  et  $U : c_0 \rightarrow Y_1$  un tel isomorphisme. D'après [Di, Chap.XII]-[Jos]-[Ness], il existe une suite  $(x_k^*)_{k \geq 0}$  dans la sphère unité de  $X^*$  telle que  $x_k^* \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$  préfaiblement.

On définit l'opérateur  $\sigma : \ell^\infty \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  par  $\sigma(\alpha)(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k(x, x_k^*)U(e_k)$ ,

$\alpha = (\alpha_k)_{k \geq 0} \in \ell^\infty$ ,  $x \in X$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_k \in X$  tel que  $(x_k, x_k^*) \neq 0$ . Cela implique que  $\sigma$  est injectif.

*Etape 1 :* Montrons que  $\sigma$  est un opérateur borné.

Pour tout  $\alpha \in \ell^\infty$  et tout  $x \in X$  on a

$$\begin{aligned} \|\sigma(\alpha)(x)\|_Y &= \left\| \sum_{k \geq 0} \alpha_k(x, x_k^*)U(e_k) \right\|_Y = \left\| U\left(\sum_{k \geq 0} \alpha_k(x, x_k^*)e_k\right) \right\|_Y \leq \\ &\|U\| \left\| \sum_{k \geq 0} \alpha_k(x, x_k^*)e_k \right\|_{c_0} \leq \|U\| \|\alpha\|_{\ell^\infty} \times \sup_{k \geq 0} |(x, x_k^*)| \leq \|U\| \times \|\alpha\|_{\ell^\infty} \times \|x\|. \end{aligned}$$

Il en résulte que  $\sigma$  est un opérateur borné.

*Etape 2 :* Montrons que  $\sigma$  est un isomorphisme sur son image.

Fixons  $k \in \mathbb{N}$ . Désignons par  $z_k^*$  la forme linéaire définie sur  $Y_1$  par  $(Ue_j, z_k^*) = \delta_{jk}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ , où  $\delta_{jk}$  est le symbole de Kronecker.

Soient  $\alpha \in \ell^\infty$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $k \in \{j \in \mathbb{N}; \alpha_j \neq 0\}$ . Il existe  $x_k \in B_X$  tel que  $1 = \|x_k^*\| \leq |(x_k, x_k^*)| + \varepsilon/|\alpha_k|$ . Pour tout  $k \in \{j \in \mathbb{N}; \alpha_j \neq 0\}$  on a

$$\begin{aligned} |\alpha_k| &\leq |\alpha_k| \times [| (x_k, x_k^*) | + \varepsilon/|\alpha_k|] = |\alpha_k| \times |(x_k, x_k^*)| + \varepsilon \\ &= |(\sigma(\alpha)(x_k), z_k^*)| + \varepsilon \leq \|\sigma(\alpha)\| \times \sup_{k \geq 0} \|z_k^*\|_{Y_1^*} + \varepsilon. \end{aligned}$$

. Cela entraîne que  $\sigma$  est un isomorphisme sur son image.

b).

Montrons que  $\sigma(c_0) \subset \sigma(\ell^\infty) \cap K(X, Y)$ .

Soient  $\alpha \in c_0$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $|\alpha_k| \leq \varepsilon$  pour tout  $k \geq k_0$ . Considérons  $T_n : X \rightarrow Y$  l'opérateur définie par

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k(x, x_k^*) Ue_k, \quad x \in X, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Il est évident que la suite  $(T_n)_{n \geq 0}$  est dans  $K(X, Y)$  et que  $\|T_n - \sigma(\alpha)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} < \varepsilon$  pour tout  $n \geq k_0$ , donc  $\sigma(\alpha)$  est un opérateur compact.

Montrons que  $\sigma(\ell^\infty) \cap K(X, Y) \subset \sigma(c_0)$ .

Remarquons d'abord que si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$  et  $y = \sum_{k \leq n} \alpha_k U(e_k)$ ,  $(y, z_j^*) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ , donc par densité pour tout  $y \in Y_1$   $(y, z_j^*) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ .

Soit  $\alpha \in \ell^\infty$  tel que  $\sigma(\alpha) \in K(X, Y)$ . Supposons que  $\alpha \notin c_0$ . Il existe donc  $\varepsilon_0 > 0$ , tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $m_k \in \mathbb{N}$  vérifiant

$$m_k \geq k \text{ et } |\alpha_{m_k}| \geq \varepsilon_0. \quad (0.1)$$

Posons  $T = \sigma(\alpha) \in K(X, Y_1)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $x_k$  dans la boule unité de  $X$  tel que  $|(x_k, x_k^*)| \geq 1 - 1/k + 2$ . Il est clair que  $\alpha_k = (Tx_k, z_k^*)/(x_k, x_k^*)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

Comme  $T$  est un opérateur compact, il existe une sous-suite  $(x_{m_{k_j}})_{j \geq 0}$  dans  $X$  telle que  $T(x_{m_{k_j}}) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} y \in Y_1$ . D'autre part, pour tout  $j \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{m_{k_j}} = \left[ (Tx_{m_{k_j}} - y, z_{m_{k_j}}^*) + (y, z_{m_{k_j}}^*) \right] / (x_{m_{k_j}}, x_{m_{k_j}}^*)$$

et  $(y, z_{m_{k_j}}^*) \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ . Par conséquent  $\alpha_{m_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow +\infty} 0$ , car  $|(x_k, x_k^*)| \geq 1 - 1/k + 2$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , ce qui est impossible d'après (0.1). Donc  $\alpha \in c_0$ .

c).

D'après le théorème de Hahn-Banach, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $y_k^* \in Y^*$  qui prolonge  $z_k^* \in Y_1^*$  et  $\|z_k^*\|_{Y_1^*} = \|y_k^*\|_{Y^*}$

Soit maintenant  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Définissons  $a(T) \in \ell^\infty$  par  $\alpha_k(T) = (Tx_k, y_k^*)/(x_k, x_k^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $P : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \sigma(\ell^\infty)$  par  $P(T) = \sigma[\alpha(T)]$ ,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

*Etape 1 :* Montrons que  $P$  est une projection.

Soient  $\alpha \in \ell^\infty$ . Posons  $T = \sigma(\alpha)$ . Remarquons que

$$\begin{aligned}\alpha_k(T) &= (Tx_k, y_k^*)/(x_k, x_k^*) = \\ (Tx_k, z_k^*)/(x_k, x_k^*) &= \alpha_k(U(e_k), z_k^*)(x_k, x_k^*)/(x_k, x_k^*) = \alpha_k.\end{aligned}$$

Donc  $P$  est une projection.

*Etape 2 :* Montrons que  $P$  est continue.

Pour tout  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  nous avons  $\|\sigma(\alpha(T))\| \leq \|\sigma\| \times \|\alpha(T)\|_{\ell^\infty} \leq \|\sigma\| \times \sup_{k \geq 0} [(Tx_k, y_k^*)/(x_k, x_k^*)] \leq \|\sigma\| \times [\|T\|] \times [\sup_{k \geq 0} (\|y_k^*\|/(1 - 1/k + 2))]$ . ■

*Etape 3 :* Soit  $T \in K(X, Y_1)$ . Montrons que  $\alpha(T) \in c_0$ .

Comme  $P$  est une projection, d'après b),  $T = \sigma(\alpha(T)) \in K(X, Y) \cap \sigma(\ell^\infty) = \sigma(c_0)$ , c'est-à-dire que  $\alpha(T) \in c_0$ . ■

d).

*Cas 1 :*  $Y$  contient  $\ell^\infty$  isomorphiquement.

Comme  $\ell^\infty$  est injectif, on peut supposer que  $Y \approx \ell^\infty$ . Considérons  $G : Y \rightarrow \ell^\infty$  un isomorphisme. Notons  $(f_n)_{n \geq 0}$  la base canonique de  $\ell^1$ ,  $h_n^* = G^* f_n \in Y^*$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $U : c_0 \rightarrow Y_1$ , la restriction de  $G^{-1}$  à  $c_0$ .

Soit maintenant  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Définissons  $\beta(T) \in \ell^\infty$  par  $\beta_k(T) = (Tx_k, h_k^*)/(x_k, x_k^*)$ ,  $k \in \mathbb{N}$  et  $Q : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \sigma(\ell^\infty)$  par  $Q(T) = \sigma[\beta(T)]$ ,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Par un argument analogue à celui de c), on montre que  $Q$  est une projection continue et  $Q|_{K(X, Y)}$  est une projection sur  $\sigma(c_0)$  (ici  $\Lambda = \mathbb{N}$ ). ■

*Cas 2 :* Toute suite bornée dans  $Y^*$  admet une sous-suite préfaiblement convergente.

Il existe une sous-suite  $(y_{n_k}^*)_{k \geq 0}$  telle que  $y_{n_k}^* \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y^*$  préfaiblement dans  $Y^*$ . Désignons par  $\Lambda = \{n_k; k \in \mathbb{N}\}$ .

Soit  $U : c_0(\Lambda) \rightarrow Y_1$  un isomorphisme. On définit l'opérateur  $\sigma : \ell^\infty(\Lambda) \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  par  $\sigma(\alpha)(x) = \sum_{k \in \Lambda} \alpha_k(x, x_k^*)U(e_k)$ ,  $x \in X, \alpha \in \ell^\infty(\Lambda)$

Pour tout  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  on définit  $\gamma(T) \in \ell^\infty(\Lambda)$  par  $\gamma_k(T) = (Tx_k, y_k^* - y^*)/(x_k, x_k^*)$ ,  $k \in \Lambda$  et  $Q : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow \sigma(\ell^\infty(\Lambda))$  par  $Q(T) = \sigma[\gamma(T)]$ ,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ .

Montrons que  $Q$  est une projection.

Considérons  $T = \sigma(\alpha)$ ,  $\alpha \in \ell^\infty(\Lambda)$ . Pour tout  $k \in \Lambda$  on a  $\gamma_k(T) =$

$$(Tx_k, y_k^* - y^*)/(x_k, x_k^*) = (Tx_k, z_k^* - y^*)/(x_k, x_k^*) = \left[ \sum_{j \in \Lambda} \alpha_j(x_k, x_j^*)(U(e_j), z_k^* - y^*) \right] / (x_k, x_k^*) = \alpha_k,$$

car pour tout  $j \in \Lambda$   $(U(e_j), y^*) = \lim_{k \rightarrow \infty} (U(e_j), z_{n_k}^*) = 0$ .

Par un argument analogue à celui de c), on montre que  $Q$  est continue.

Montrons finalement que  $\gamma(T) \in c_0(\Lambda)$ , pour tout  $T \in K(X,Y)$ .

Soit  $T \in K(X,Y)$ . Supposons que  $\gamma(T) \notin c_0$ , il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe  $m_k \in \Lambda$  vérifiant

$$m_k \geq k \text{ et } \left| \gamma_{m_k}(T) \right| \geq \varepsilon_0. \quad (0.2)$$

D'autre part, il existe une sous-suite  $(x_{m_{k_j}})_{j \geq 0}$  telle que  $Tx_{m_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} y \in Y$ .

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$  on a

$$\gamma_{m_{k_j}}(T) = \left[ (Tx_{m_{k_j}} - y, y_{m_{k_j}}^* - y^*) + (y, y_{m_{k_j}}^* - y^*) \right] / (x_{m_{k_j}}, x_{m_{k_j}}^*).$$

Il est clair que  $\gamma_{m_{k_j}}(T) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ , car  $(y, y_{m_{k_j}}^* - y^*) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ , ceci est impossible, donc  $\gamma(T) \in c_0(\Lambda)$ . ■

Les deux corollaires suivants sont une conséquence de la proposition 0.1-d.

**Corollaire 0.1.** *Supposons  $Y$  contient  $\ell^\infty$  isomorphiquement. Alors  $K(X,Y)$  contient une copie complémentée de  $c_0$ .*

**Corollaire 0.2.** *Supposons que  $Y$  contient  $c_0$  isomorphiquement et que toute suite bornée dans  $Y^*$  admet une sous-suite qui converge préfaiblement. Alors  $K(X,Y)$  contient une copie complémentée de  $c_0$ .*

**Corollaire 0.3.** [Fe, Coroll.4]-[Ch, Coroll.4]-[Joh, Th. 4] *Supposons que  $Y$  contient  $c_0$  isomorphiquement. Alors il n'existe aucune projection continue  $\mathcal{L}(X,Y) \rightarrow K(X,Y)$ .*

Démonstration.

Supposons qu'il existe une projection continue  $P : \mathcal{L}(X,Y) \rightarrow K(X,Y)$ .

*Cas 1 :*  $Y$  ne contient pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement et  $X$  ne contient pas une copie complémentée de  $\ell^1$ .

D'après [Kalt, Th.4],  $K(X,Y)$  ne contient pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement. D'autre part, la proposition 0.1, nous montre qu'il existe un isomorphisme  $\sigma : \ell^\infty \rightarrow \sigma(\ell^\infty) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ . En appliquant [Kalt, Prop.2], on voit que  $P \circ \sigma : \ell^\infty \rightarrow K(X,Y)$  est faiblement compact, ceci est impossible, car  $P \circ \sigma|_{c_0} = \sigma|_{c_0}$  un isomorphisme. ■

*Cas 2 :*  $Y$  ne contient pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement et  $X$  contient une copie complémentée de  $\ell^1$ .

Ce cas implique qu'il existe une poroprojection continue  $P_1 : \mathcal{L}(\ell^1, Y) \rightarrow K(\ell^1, Y)$ . D'après [Kalt, Th.6],  $K(\ell^1, Y)$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement, ce qui est impossible, car  $K(\ell^1, Y)$  contient  $\ell^\infty$  isomorphiquement. ■

*Cas 3 :*  $Y$  contient  $\ell^\infty$  isomorphiquement. D'après la proposition 0.1-d), il existe une projection  $Q : K(X, Y) \rightarrow \sigma(c_0)$ . Comme  $\ell^\infty$  est un espace de Grothendieck, d'après [Groth, Groth]  $\sigma \circ Q \circ P : \ell^\infty \rightarrow \sigma(c_0)$  est faiblement compact, ce qui est impossible, car  $\sigma \circ Q \circ P|_{c_0}$  un isomorphisme. ■

**Corollaire 0.4.** [Emm, Th.2]-[Ch, Coroll.7]-[Joh, Croll.7] *Supposons qu'il existe une projection continue  $P : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow K(X, Y)$ . Alors  $K(X, Y)$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement.*

Démonstration.

D'après le corollaire 0.3,  $Y$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement.

Montrons d'abord que  $K(X, Y)$  ne contient pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement.

Supposons que  $K(X, Y)$  contient  $\ell^\infty$  isomorphiquement. Le résultat de [Kalt, Th.4], nous indique que  $X$  contient une copie complétée de  $\ell^1$ , il en résulte qu'il existe donc une projection continue  $\mathcal{L}(\ell^1, Y) \rightarrow K(\ell^1, Y)$ , ce qui est impossible d'après [Kalt, Th.6]. On en déduit que  $K(X, Y)$  ne contient pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement.

Supposons qu'il existe un isomorphisme  $\sigma_1 : c_0 \rightarrow \sigma_1(c_0) \subset K(X, Y)$ . Pour tout  $\alpha \in \ell^\infty$  et tout  $x \in X$  on a

$$\begin{aligned} & \sup \left\{ \left\| \sum_J \alpha_n \sigma_1(e_n) x \right\|_Y ; J \text{ est un sous-ensemble de } \mathbb{N} \text{ fini} \right\} < \\ & \|x\| \times \sup \left\{ \left\| \sum_J \alpha_n \sigma_1(e_n) \right\|_{\mathcal{L}(X, Y)} ; J \text{ est un sous-ensemble de } \mathbb{N} \text{ fini} \right\} < \\ & \|x\| \times \|\sigma_1\| \sup \left\{ \left\| \sum_J \alpha_n e_n \right\|_{c_0} ; J \text{ est un sous-ensemble de } \mathbb{N} \text{ fini} \right\} < +\infty. \end{aligned}$$

Comme  $Y$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement, la série  $\sum_{n \geq 0} \alpha_n \sigma_1(e_n) x$  converge dans  $Y$  pour tout  $x \in X$  [Kalt, prop.3]. On définit  $\sigma_2 : \ell^\infty \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  par  $\sigma_2(\alpha)(x) = \sum_{k \geq 0} \alpha_k \sigma_1(e_k)(x)$ ,  $x \in X$ . Considérons  $P \circ \sigma_2 : \ell^\infty \rightarrow K(X, Y)$ . D'après [Kalt, Prop2],  $P \circ \sigma_2$  est faiblement compact, car  $K(X, Y)$  ne contient pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement, c'est impossible, car  $P \circ \sigma_2|_{c_0} = \sigma_1$ . ■

**Proposition 0.2.** *Supposons que  $\mathcal{L}(X, Y)$  ne contient pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement. Alors  $K(X, Y)$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement.*

Démonstration.

Supposons qu'il existe un isomorphisme  $\sigma_1 : c_0 \rightarrow \sigma_1(c_0) \subset K(X, Y)$ . Remarquons d'après la proposition 0.1 que  $Y$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement et que

$$\sup \left\{ \left\| \sum_J \alpha_n \sigma_1(e_n)(x) \right\|_Y ; J \text{ est un sous-ensemble fini de } \mathbb{N} \right\} < +\infty$$

pour tout  $\alpha \in \ell^\infty$  et tout  $x \in X$ . L'espace  $Y$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement, donc d'après [Kalt, Prop.3], la série  $\sum_{k \geq 0} \alpha_n \sigma_1(e_n)x$

converge dans  $Y$  pour tout  $x \in X$ . On définit  $\sigma_2 : \ell^\infty \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  par  $\sigma_2(\alpha)x = \sum_{n \geq 0} \alpha_n \sigma_1(e_n)x$ ,  $\alpha \in \ell^\infty$ ,  $x \in X$ . Comme  $\mathcal{L}(X, Y)$  ne contient

pas  $\ell^\infty$  isomorphiquement, d'après [Kalt, Prop.2]  $\sigma_2$  est faiblement compact. Il en résulte que  $\sigma_1$  est faiblement compact, ceci est impossible, par conséquent  $K(X, Y)$  ne contient pas  $c_0$  isomorphiquement. ■

Soit  $X, Y$  deux espaces de Banach. Désignons par  $X \overset{\vee}{\otimes} Y$  (resp.  $X \widehat{\otimes} Y$ ) le produit injectif de  $X, Y$  (resp. le produit projectif de  $X, Y$ ). Désignons d'autre part, par  $B(X \times Y)$  l'espace des formes bilinéaires  $u : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  telles que  $\sup\{|u(x, y)| ; \|x\|, \|y\| \leq 1\} < \infty$ .

**Thorme 0.1.** *Il existe un espace de Banach  $Z$  qui possède des propriétés suivantes :*

- 1)  $K(Z)$  est un espace complémenté de  $\mathcal{L}(Z)$ .
- 2)  $K(Z)$  n'est pas complémenté dans son bidual.

**Proposition 0.3.** *Supposons que  $Y$  ou  $X^*$  a la propriété de l'approximation bornée. Alors  $K(X, Y)$  est complémenté dans  $K(X, Y)^{**}$ , si et seulement si  $K(X, Y)$  et  $Y$  sont complémentés dans  $\mathcal{L}(X, Y)$  et dans  $Y^{**}$  respectivement.*

Démonstration de proposition 0.3.

Supposons qu'il existe une projection continue  $Q : K(X, Y)^{**} \rightarrow K(X, Y)$ . Montrons que  $Y$  est complémenté dans son bidual.

Considérons  $x_0$  dans la sphère unité de  $X$  et  $x^*$  dans la sphère unité de  $X^*$  tels que  $(x_0, x^*) = 1$ . On définit l'opérateur  $H : Y \rightarrow K(X, Y)$

par  $H(y)(x) = (x, x^*)y$ ,  $x \in X, y \in Y$  et l'opérateur  $G : K(X, Y) \rightarrow Y$ , par  $G(T) = Tx_0$ ,  $T \in K(X, Y)$ . Notons  $Q_1 = G \circ Q \circ H^{**} : Y^{**} \rightarrow Y$ . Il est clair que  $Q_1$  est une projection continue sur  $Y$ .

Montrons que  $K(X, Y)$  est complémenté dans  $\mathcal{L}(X, Y)$ .

*Cas 1* :  $Y$  a la propriété de l'approximation bornée.

D'après [Joh, Lemma 2], il existe un isomorphisme  $U : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow K(X, Y)^{**}$  tel que la restriction de  $U$  à  $K(X, Y)$  est l'identité.

Notons  $P = Q \circ U : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow K(X, Y)$ . Il est facile de voir que  $P$  est une projection continue sur  $K(X, Y)$ .

*Cas 2* :  $X^*$  a la propriété de l'approximation bornée.

Il existe une suite généralisée  $(V_i)_{i \in I}$  d'opérateurs de rang finis  $X^* \rightarrow X^*$  telle que  $V_i \rightarrow I_{X^*}$  uniformément sur tout compact de  $X^*$  et  $\sup_{i \in I} \|V_i\|_{\mathcal{L}(X^*)} < \infty$ . Posons pour  $i \in I$  et  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $U_i^T = V_i \circ T^* : Y^* \rightarrow X^*$  et  $H_i^T = Q_1 \circ (U_i^T)^* : X \rightarrow Y$ . Il est évident que  $H_i^T \in K(X, Y)$ . On définit l'opérateur  $U : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow K(X, Y)^{**}$ , par  $U(T) = \lim_{\mathcal{U}} H_i^T$ ,  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  (limite préfaible suivant  $\mathcal{U}$  dans  $K(X, Y)^{**}$ ). On se propose de montrer que  $P = Q \circ U : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow K(X, Y)$  est une projection continue.

Remarquons d'abord que  $P$  est continue, car la suite  $(V_i)_{i \in I}$  est bornée dans  $\mathcal{L}(X^*)$ . Considérons  $T \in K(X, Y)$ . Comme  $T^*$  est compact,  $\|U_i^T - T^*\|_{\mathcal{L}(Y^*, X^*)} \rightarrow 0$ , ceci implique que  $\|(U_i^T)^* - T^{**}\|_{\mathcal{L}(X^{**}, Y^{**})} \rightarrow 0$ . Il en résulte que  $\|H_i^T - Q_1 \circ T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = \|H_i^T - T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} \rightarrow 0$ , par conséquent  $P(T) = Q \circ U(T) = Q(T) = T$ . ■

Supposons qu'il existe une projection  $P : \mathcal{L}(X, Y) \rightarrow K(X, Y)$  et  $Q_1 : Y^{**} \rightarrow Y$  une projection continue. Montrons que  $K(X, Y)$  est complémenté dans  $K(X, Y)^{**}$ .

Comme  $Y$  ou  $X^*$  à la propriété de l'approximation bornée,  $K(X, Y) = X^* \overset{\vee}{\otimes} Y$ . On définit l'opérateur  $J : X \widehat{\otimes} Y^* \rightarrow K(X, Y)^*$

par  $(J \sum_{k \leq n} x_k \otimes y_k^*, \sum_{j \leq m} x_j^* \otimes y_j) = \sum_{k \leq n, j \leq m} (x_k, x_j^*) \times (y_j, y_k^*)$ , les  $x_k \in X$ , les  $y_k^* \in Y^*$ , les  $x_j^* \in X^*$  et les  $y_j \in Y$ .

Montrons que  $J$  est un opérateur borné.

Considérons  $(x_k)_{k \leq n} \in X$ ,  $(y_k^*)_{k \leq n} \in Y^*$ ,  $(x_j^*)_{j \leq m} \in X^*$ ,  $(y_j)_{j \leq m} \in Y$ . On a alors



$$\begin{aligned}
& \left| \left( J \sum_{k \leq n} x_k \otimes y_k^*, \sum_{j \leq m} x_j^* \otimes y_j \right) \right| \\
&= \left| \sum_{k \leq n} (y_k^*, \left[ \sum_{j \leq m} (x_j^* \otimes y_j) \right] (x_k)) \right| \\
&\leq \sum_{k \leq n} \|y_k^*\|_{Y^*} \left\| \left[ \sum_{j \leq m} x_j^* \otimes y_j \right] (x_k) \right\|_Y \\
&\leq \sum_{k \leq n} \|y_k^*\|_{Y^*} \|x_k\|_X \left\| \sum_{j \leq m} x_j^* \otimes y_j \right\|_{K(X,Y)}.
\end{aligned}$$

Donc  $J$  est continue.

Soit maintenant  $R \in K(X,Y)^{**}$ . On définit  $\xi_R \in (X \hat{\otimes} Y^*)^*$  par  $\xi_R(u) = (J(u), R)$ ,  $u \in X \hat{\otimes} Y^*$ . D'après [Du, coroll.2, chap. VIII-2],  $\xi_R \in B(X \times Y^*) = \mathcal{L}(X, Y^{**})$ . Considérons  $V : \mathcal{L}(X, Y^{**}) \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$  l'opérateur défini par  $V(S) = Q_1 \circ S \in \mathcal{L}(X, Y)$ ,  $S \in \mathcal{L}(X, Y^{**})$  et  $Q : K(X, Y)^{**} \rightarrow K(X, Y)$  l'opérateur défini par  $Q(R) = P[V(\xi_R)]$ ,  $R \in K(X, Y)^{**}$ . On remarque que  $Q$  est une projection continue sur  $K(X, Y)$ . ■

Démonstration du théorème 0.1.

D'après [Tab, Th4.1.1], il existe un espace de Banach  $Z$  tel que  $Z^* = \ell^1$  et  $K(Z)$  soit complémenté dans  $\mathcal{L}(Z)$ . Remarquons que l'espace  $Z$  n'est pas réflexif, comme  $Z^{**} = \ell^\infty$  est un espace de Grothendieck [Groth]  $Z$  ne peut pas être complémenté dans son bidual. D'autre part,  $Z^* = \ell^1$  a la propriété de l'approximation bornée, d'après [Du, Chap. VIII-3]  $Z$  a la propriété de l'approximation bornée. En appliquant la proposition 0.3, on voit que  $K(Z)$  n'est pas complémenté dans son bidual. ■

**Problème 0.1.** *Existe-il deux espaces de Banach  $X$  et  $Y$  tel que  $K(X, Y)$  soit complémenté dans son bidual et  $\mathcal{L}(X, Y) \neq K(X, Y)$ ?*

**Remarque 0.1.** *Si  $Y$  ou  $X^*$  a la propriété de l'approximation bornée, il existe une projection de  $\mathcal{L}(X, Y)^{**}$  sur  $K(X, Y)^{**}$ .*

Preuve. En effet,

Supposons que  $Y$  a la propriété de l'approximation bornée. Soit  $P_1 : K(X, Y)^{****} \rightarrow K(X, Y)^{**}$  une projection continue telle que  $(P_1 V, \xi) = (V, \xi)$  pour  $\xi \in K(X, Y)^*$  et  $V \in K(X, Y)^{**}$ .

L'application  $P_1 \circ U^{**} : \mathcal{L}(X, Y)^{**} \rightarrow (K(X, Y))^{**}$  est une projection continue ( $U$  est l'opérateur défini auparavant).■

**Remarque 0.2.** Soit  $X$  un espace de Banach. Supposons qu'il existe une projection continue  $P : L^\infty(\mathbb{T}, X) \rightarrow L^\infty(\mathbb{T}) \overset{\vee}{\otimes} X$ . Alors  $X$  est de dimension finie.

Preuve. En effet,

Comme  $L^\infty(\mathbb{T}, X)$  contient une copie (isométrique) complémentée de  $\ell^\infty(X)$  et  $L^\infty(\mathbb{T}) \overset{\vee}{\otimes} X$  contient une copie complémentée de  $\ell^\infty \overset{\vee}{\otimes} X$ , alors  $K(\ell^1, X) = \ell^\infty \overset{\vee}{\otimes} X$  est complémenté de  $\mathcal{L}(\ell^1, X) = \ell^\infty(X)$ . D'après [Kalt, th.6],  $X$  est de dimension finie.■

## RÉFÉRENCES

- [Ch] **I. Chenciu**, *Complemented spaces of operators*, *Proc. Am. Math. Soc.* Vol. 133, n°. 9, 2621-2623, (2005).
- [Du] **J. Diestel, J. Uhl**, *Vector measures*, *Math. Surveys* N°.15, (1977), A. M. S.
- [Di] **J. Diestel**, *Sequence and series in Banach spaces*, *Graduate Texts in Math.* n°. 92, (Springer Verlag, 1984).
- [Emm] **G. Emmanuele**, *A remark on the containment of  $c_0$  in spaces of compact operators*, *Math. Proc. Camb. phil. Soc.* 111, 331-335, (1992)
- [Fe] **M. Feder**, *On the non existence of projection onto the space of compact operators*, *Cand. Math. Bull.* 25, 78-81, (1992).
- [Fe1] **M. Feder and P. Saphar**, *Spaces of compact operators and their dual spaces*, *Israel J. Math.* 21, 38-49, (1974).
- [Groth] **A. Grothendieck**, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces de type  $C(K)$* , *Canad. J. Math.* 5, 129-173, (1953).
- [Joh] **J. Johnson**, *Remarks on Banach spaces of compact operators*, *J. F. A.* 32, 304-311, (1979).
- [Jos] **B. Josefson**, *Weak sequential convergence in the dual of a Banach spaces does not imply norm convergence*, *Ark. Mat.* 13, 79-89, (1975).
- [Kalt] **N. J. Kalton**, *Spaces of compact operators*, *Math. Ann.* 208, 267-278, (1974).
- [Ness] **A. Nessenzweig**,  *$w^*$  sequential convergence*, *Israel J. Math.* 22, 79-89, (1975).
- [Tab] **M. Tarbard**, *Operators on Banach spaces of Bourgain-Delbaen-Type*, *arXiv :1309.7469V1* (2012).
- [Ros] **H. P. Rosenthal**, *On relativity disjoint families of measures with some applications to space theory*, *Stud. Math.* 37, 13-36, (1970).

M.daher@orange.fr